

A fűrészmozgás kinetikai vizsgálata

Az alábbi dolgozat az 1988 - ban Sopronban, a kandidátusi fokozat elnyerése céljából írt értekezésem alapján készült, melynek címe:

Balesetvédelmi és környezetkímélő eljárások az erdészeti anyagmozgatásban.

Az eredeti munkámat némiképpen átdolgoztam, felújítottam, főként a számítástechnikai lehetőségek fejlődése okán.

A fadöntés mechanikájának általam megismert szakirodalma meglepő módon nemigen foglalkozik egy alapvető jelenség mechanikai vizsgálatával: a fűrésznek a rönkben történő előrehaladásával.

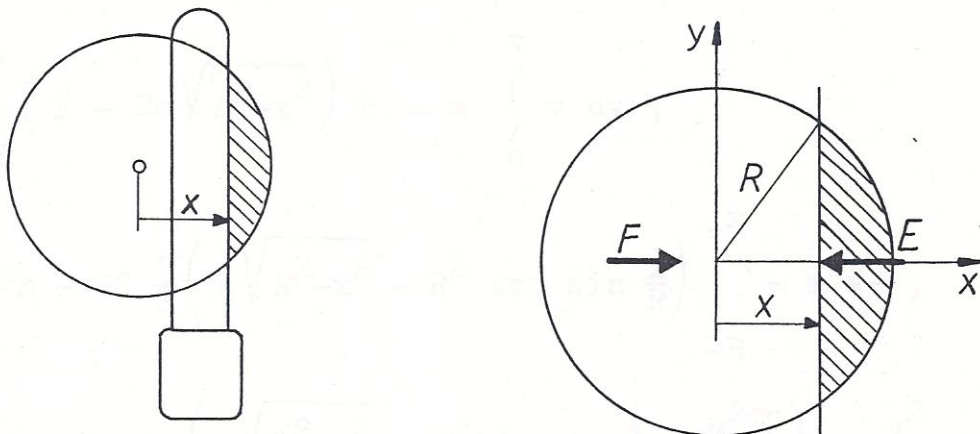
Hangsúlyozom: az előrehaladásról, tehát a fűrészélre merőleges irányú mozgásról van szó; a fűrészfogaknak a fához viszonyított relatív mozgásával bő irodalom foglalkozik: [1], [2].

Pontosabban a következő függvények meghatározásáról van itt szó:

$\sim x = x(t)$: a fűrészél helyzetének időbeli változása,

$\sim v = v(x)$: a fűrészél sebességének változása a koordináta függvényében.

A második függvénnyel foglalkozunk először.



1. ábra

Az 1. ábra alapján az m tömegű fűrészre felírt kinetikai alapegyenlet:

$$m \cdot \ddot{x} = F - E, \quad (1)$$

ahol F : a fűrész eltoló erő,

E : a faanyag által a fűrészre kifejtett ellenállás x tengellyel párhuzamos összetevője. Ez utóbbi erőről feltételezhető, hogy nagysága arányos a fűrészél által kijelölt pillanatnyi húrhosszal. Tehát, ha az átvágandó fatörzs keresztmetszete R sugarú kör, akkor

$$E = c \cdot h. \quad (2)$$

A (2) képletben c : állandó, mértékegysége $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$.

Az 1. ábra szerint:

$$h = 2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}, \quad (3)$$

így az alapegyenlet (1), (2), (3) - mal:

$$m \cdot \ddot{x} = F - 2 \cdot c \cdot \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (4)$$

Most (4) bal oldalát átalakítva:

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dx} \cdot v, \quad (5)$$

így (4) és (5) - tel:

$$m \cdot v \cdot \frac{dv}{dx} = F - 2 \cdot c \cdot \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (6)$$

Integrálva – ld.: [3]! – :

$$\int_{-R}^x \left(F - 2 \cdot c \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx = m \cdot \int_0^v v \, dv ,$$

$$\left[F \cdot x - 2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \cdot \arcsin \frac{x}{R} \right) \right]_{-R}^x = m \cdot \frac{v^2}{2} ,$$

$$F \cdot (x + R) - c \cdot \left(x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \cdot \arcsin \frac{x}{R} + \frac{R^2 \cdot \pi}{2} \right) = m \cdot \frac{v^2}{2} ,$$

tehát a keresett $v = v(x)$ függvény:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \left[F \cdot (x + R) - c \cdot \left(x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \cdot \arcsin \frac{x}{R} + \frac{R^2 \cdot \pi}{2} \right) \right]} . \quad (7)$$

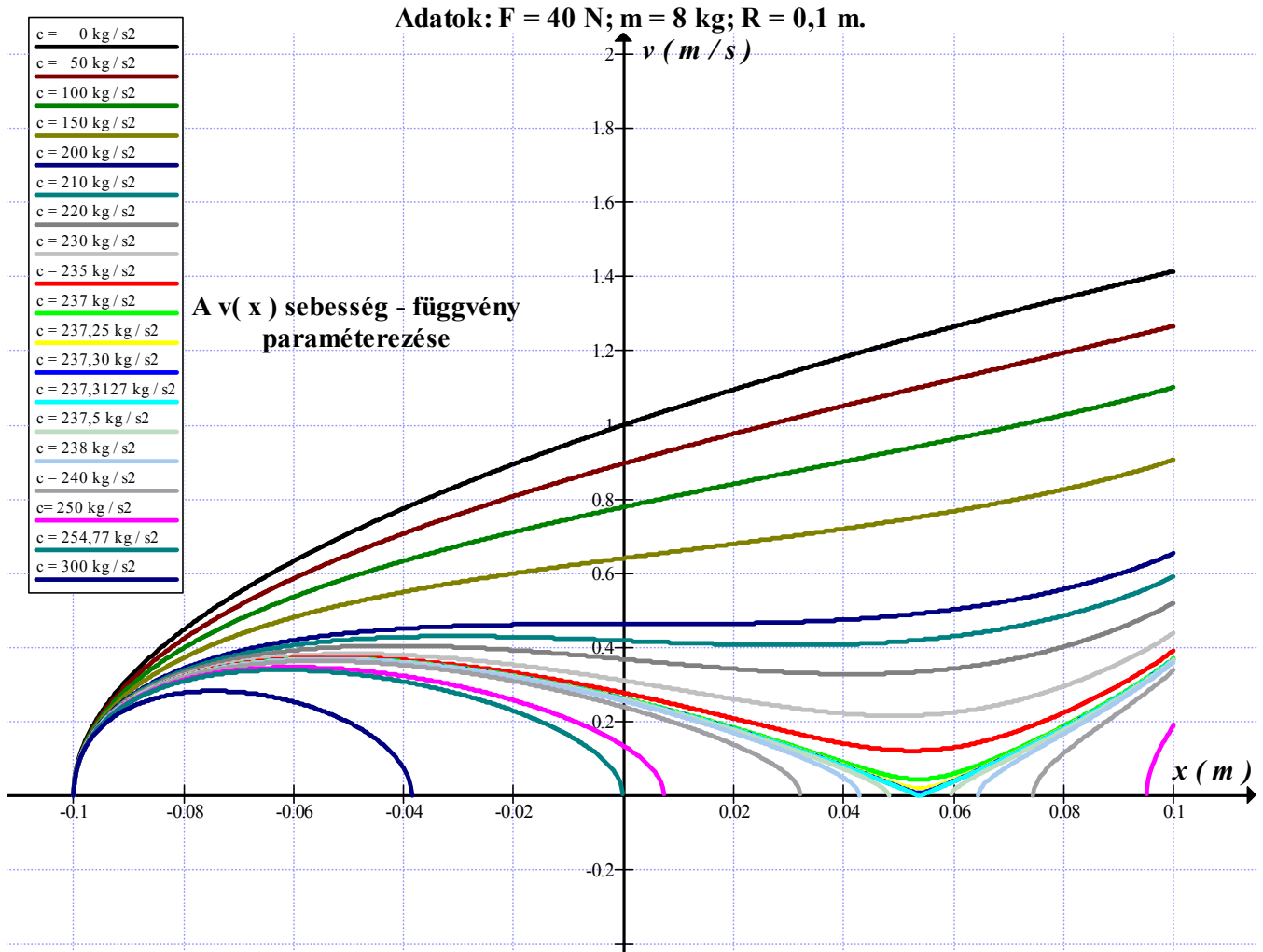
A $v = v(x)$ függvény grafikonját különböző c értékek esetén a 2. ábra szemlélteti egy konkrét (F, m, R) adathármas: $F = 40 \text{ N}$, $m = 8 \text{ kg}$, $R = 0,1 \text{ m}$ esetén.

Megmutatható, hogy a $c = \frac{F}{2 \cdot R}$ - nél nagyobb (de nem túl nagy) c értékek esetén a görbéknek az $x = 0$ helyre szimmetrikusan helyi szélsőértékük van.

A maximum, ill. a minimum helye:

$$x = -\sqrt{R^2 - \frac{F^2}{4 \cdot c^2}} , \quad \text{ill.: } x = \sqrt{R^2 - \frac{F^2}{4 \cdot c^2}} . \quad (8)$$

A grafikonok szerint nagy c értékek esetén – vagyis, ha az anyag ellenállása nagy – a fűrészelési folyamat leáll, a sebesség - grafikon megszakad.



2. ábra

Mivel $v = \frac{dx}{dt} = v(x)$, a változókat szétválasztva és integrálva, (7) - tel kapjuk, hogy:

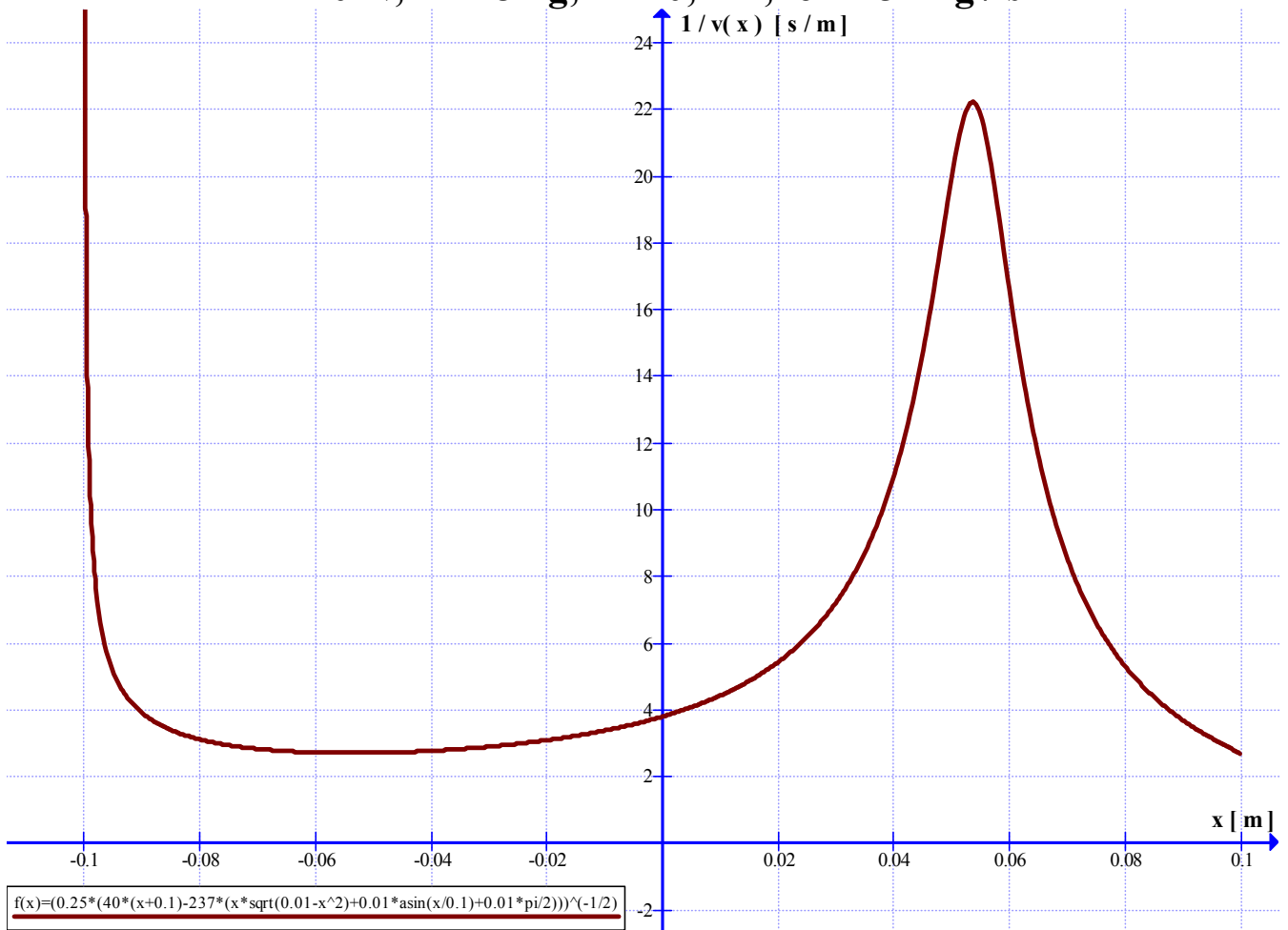
$$\int_{-R}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \left[F \cdot (x + R) - c \cdot \left(x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \cdot \arcsin \frac{x}{R} + \frac{R^2 \cdot \pi}{2} \right) \right]}} = \int_0^t dt. \quad (9)$$

A bal oldalon álló integrált a **Graph** grafikus szoftver segítségével határozzuk meg: előállítjuk az $1/v(x)$ függvényt – 3. ábra –, melynek grafikon - alatti területe szolgáltatja a rönk átvágásához szükséges T időt.

A $c = 237 \text{ kg/s}^2$ paraméterhez tartozó átvágási idő:

$$\underline{\underline{T \approx 1.22 \text{ s}}}$$

$$F = 40 \text{ N}; m = 8 \text{ kg}; R = 0,1 \text{ m}; c = 237 \text{ kg / s}^2$$



3. ábra

A $t = t(x)$ függvényt, valamint ennek inverzét, a keresett $x = x(t)$ függvényt célszerű grafikusán előállítani, szintén a **Graph** szoftver használatával.

A $t = t(x)$ függvényt úgy állítjuk elő, hogy egymás után képezzük a

$$t(x_f) = \int_{x_a=-R}^{x_f=-R+i \cdot \Delta x} \frac{1}{v(x)} dx \quad (10/1)$$

függvény - értékeket, ahol

$$\Delta x = \frac{2R}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (10/2)$$

Példaképpen legyen $\Delta x = \frac{2 \cdot 0,1 \text{ m}}{20} = 0,01 \text{ m}!$

Ezzel készítettük az alábbi táblázatot, melynek utolsó idő - adata: az átvágási idő.

i	x_a [m]	x_f [m]	$t (x_a , x_f)$ [s]
0	- 0,099999	- 0,099999	0
1	- 0,099999	- 0,09	0,0696973
2	- 0,099999	- 0,08	0,1046295
3	- 0,099999	- 0,07	0,1348044
4	- 0,099999	- 0,06	0,1631878
5	- 0,099999	- 0,05	0,1910498
6	- 0,099999	- 0,04	0,2191892
7	- 0,099999	- 0,03	0,2482647
8	- 0,099999	- 0,02	0,2789478
9	- 0,099999	- 0,01	0,3120438
10	- 0,099999	0,00	0,3486478
11	- 0,099999	0,01	0,3904193
12	- 0,099999	0,02	0,4401658
13	- 0,099999	0,03	0,5033288
14	- 0,099999	0,04	0,5926160
15	- 0,099999	0,05	0,7432241
16	- 0,099999	0,06	0,9495556
17	- 0,099999	0,07	1,0699801
18	- 0,099999	0,08	1,1380191
19	- 0,099999	0,09	1,1831510
20	- 0,099999	0,10	1,2156736

A táblázat alapján készült grafikon a 4. ábrán szemlélhető.

A grafikon szintén a **Graph** - fal készült, harmadfokú interpoláció alkalmazásával.

Nyilvánvaló, hogy a 4. ábra az $x = x (t)$ grafikont is tartalmazza; ez érzékelhető, ha fejünket 90 fokkal jobbra billentve szemléljük a 4. ábrát.

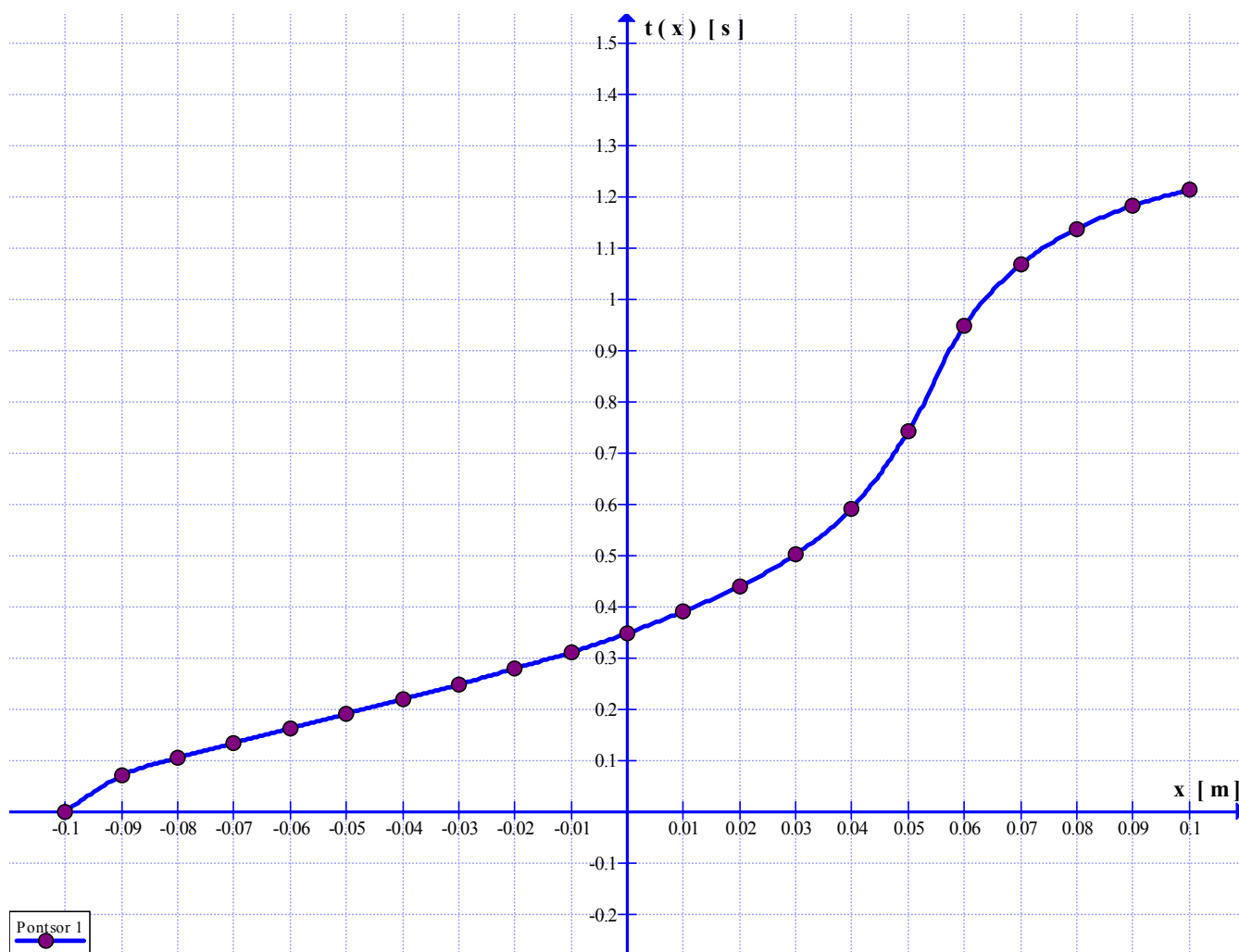
Megjegyzem, hogy az alkalmazott függvények meglehetősen érzékenyek a bennük szereplő állandók értékére, így valóságközeli eredmények esetleg csak többszöri próbálkozás után állnak elő. A számított eredményeket érdemes kísérletileg ellenőrizni.

Irodalom:

[1] – Hajdu Endre: Fűrészelési folyamatok kinematikai vizsgálata
Erdészeti és Faipari Egyetem Kiadványai, Sopron, 1970.

[2] – Szerk. Lugosi Armand: Faipari kézikönyv
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

[3] – I. N. Bronstejn ~ K. A Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, több kiadásban



4. ábra

Készítette: Hajdu Endre

Sopron, 2010. február 12.